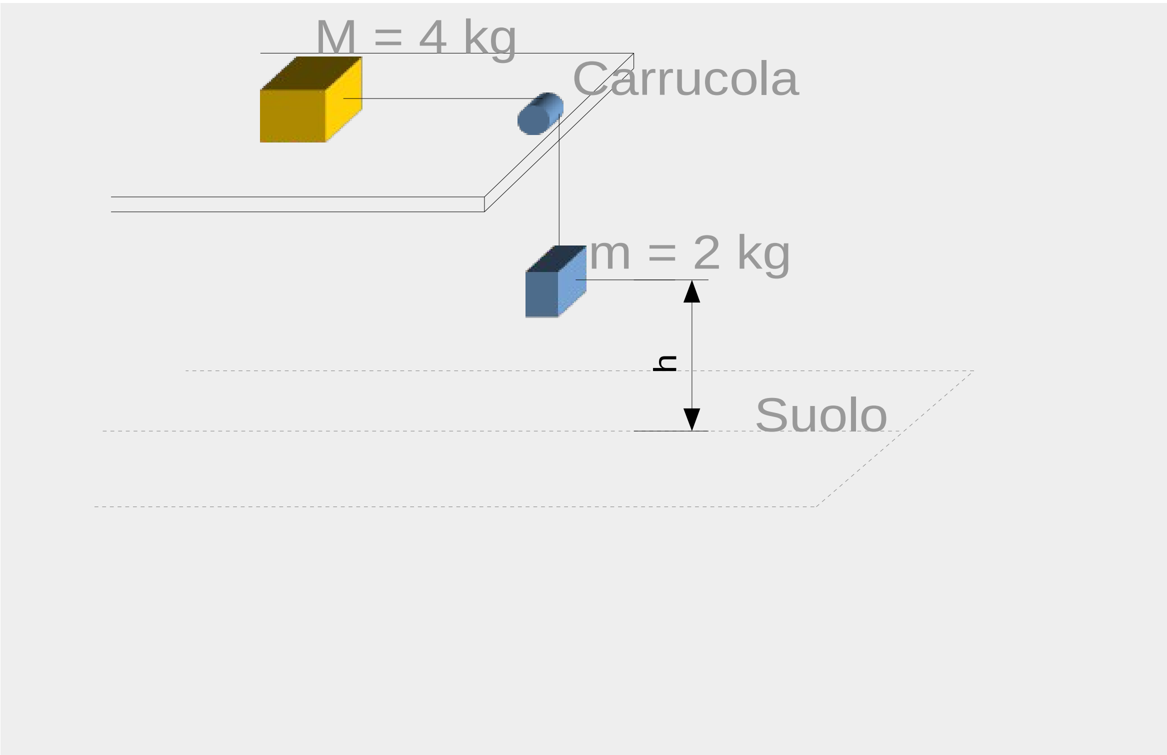
Esercizio N. 7

In riferimento alla figura le due masse "M" ed "m" hanno rispettivamente i seguenti valori: 4,00 kg e 2,00 kg. La funicella è parallela al piano e la carrucola è priva d'attrito.
In un certo istante la massa "m" si trova ad una quota "h = 0,400 m" rispetto al livello di riferimento che definiamo "suolo", ed è ferma . Supponendo nullo l'attrito fra la massa "M" e il piano, calcolare:

a) Il modulo della velocità delle due masse, un istante prima che la massa "m" raggiunga il suolo.
b) L'accelerazione del sistema.
c) La tensione sulla fune nella situazione in cui le masse sono già in movimento.

d) Calcolare le medesime grandezze nel caso in cui fra la massa "M" e il piano vi sia attrito, assumendo per il coefficiente d' attrito il valore di 0,300.



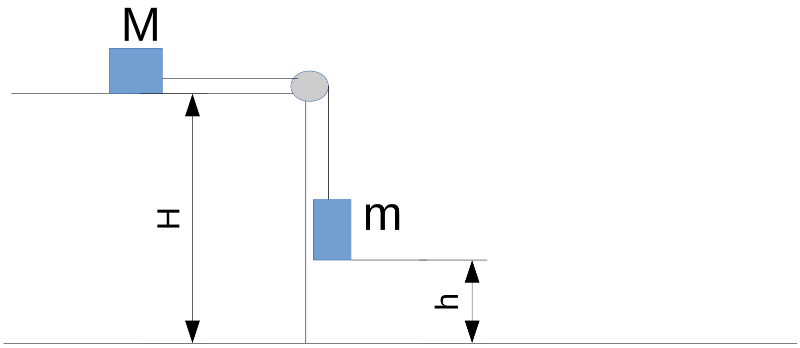
Soluzione

Quesito a

Nel caso in cui l'attrito è nullo, l'energia meccanica del sistema si conserverà. Il principio di conservazione dell'energia meccanica recita infatti in questo modo:
In un sistema in cui non agiscono forze d'attrito l'energia meccanica si conserva.

Di conseguenza, indicando con E_{mi} ed E_{mf} , rispettivamente l'energia meccanica del sistema nella posizione iniziale, (h=0,4m) e nella posizione finale, (h=0), quando il corpo di massa “m” ha raggiunto il suolo, si ha:

$$E_{mi}=E_{mf}$$



Considerando come quota di riferimento quella del suolo, scriviamo le espressioni dell'energia meccanica, iniziale e finale del sistema, dove con “iniziale” e “finale”, intendiamo rispettivamente la situazione in cui la massa “m” si trova alla quota “h” e quella in cui la stessa si trova al livello del suolo. Si ha:

Significato dei simboli.

H: quota della massa “M” rispetto al suolo

h : quota della massa “m” rispetto al suolo

v : modulo della velocità finale delle due masse

$$E_{mi}=MgH+mgh \quad \textit{relazione 1 ;} \quad E_{mf}=MgH+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\frac{1}{2}M\cdot v^2 \quad \textit{relazione 2}$$

Uguagliando le relazioni 1 e 2 si ha:

$$E_{mi}=E_{mf} \quad \rightarrow \quad MgH+mgh=MgH+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\frac{1}{2}M\cdot v^2 \quad \textit{relazione 3}$$

Notiamo che la quantità “MgH” presente in entrambe i membri si può elidere. Si ha:

$$mgh=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\frac{1}{2}M\cdot v^2 \quad \rightarrow \quad mgh=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\frac{1}{2}M\cdot v^2 \quad mgh=\frac{1}{2}\cdot v^2\cdot(m+M) \quad \rightarrow$$

$$v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+M}} \quad \rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4}{2+4}}\simeq 1{,}62\,m/s \quad v\simeq 1{,}62\,m/s$$

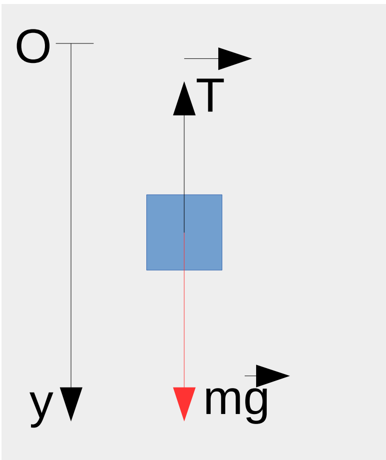
Quesito b

Per calcolare l'accelerazione del sistema composto dalle due masse, osserviamo che, nel caso senza attrito, l'unica forza esterna agente su di esso è la forza peso del corpo di massa “m”. La forza peso agente sulla massa “M” è equilibrata dalla reazione vincolare del piano. Quest'ultima è normale al piano stesso proprio perché non vi è attrito.
Applicando la legge fondamentale della dinamica al sistema composto dalle masse “m” e “M” si ha allora:

$$mg=(m+M)\cdot a \quad \rightarrow \quad a=\frac{m}{(m+M)}\cdot g \quad \rightarrow \quad a=\frac{2}{(2+4)}\cdot 9{,}81\simeq 3{,}27\,m/s^2 \quad \rightarrow \quad a\simeq 3{,}27\,m/s^2$$

Quesito c

Per calcolare la tensione sulla fune consideriamo il diagramma di corpo libero della massa “m”.



Considerando il sistema di riferimento fissato in figura si ha:

$$mg-T=ma \quad \rightarrow$$

$$T=m\cdot(g-a)=(2\,kg)\cdot(9{,}81\,m/s^2-3{,}27\,m/s^2)\simeq 13{,}1\,N \quad \rightarrow$$

$$T\simeq 13{,}1\,N$$

Quesito d

Per la soluzione del quesito d è possibile applicare il teorema dell'energia meccanica.
Il lavoro compiuto dalle forze d'attrito è uguale alla variazione di energia meccanica del sistema.

Indicando con “d” lo spostamento della massa “M”, si evince facilmente che è uguale ad “h”, cioè la quota iniziale della massa “m” rispetto al suolo. Scendendo verso il basso la massa “m” si sposta di una quantità “h”, la stessa di cui si sposterà la massa “M” solidale alla massa “m”.

$$-F_a\cdot d=(k_f-k_i)+(U_f-U_i)$$

Nel nostro caso k_i è zero in quanto i due corpi sono inizialmente fermi, per ipotesi. Si ha allora:

$$-F_a \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h$$ Relazione 1

La forza d'attrito fra il corpo di massa “M” e il piano è data dalla relazione:

$$F_a = u \cdot M \cdot g$$ Relazione 2

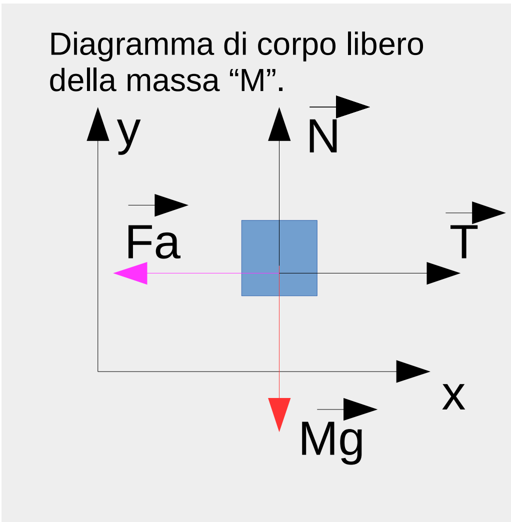
Sostituendo la relazione due nella relazione 1 e , tenendo conto che “h=d”, si ha:

$$-u \cdot M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h \quad \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{mgh - uMgh}{0{,}5 \cdot (M+m)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 - 0{,}3 \cdot 4 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 6}} \simeq 1.02\, m/s$$

$$v \simeq 1.02\, m/s$$

Per calcolare l'accelerazione nel caso in cui vi è attrito, studiamo i diagrammi di corpo libero delle due masse e applichiamo la legge fondamentale della dinamica.



$$\sum F_x ; \quad T - F_a = M \cdot a$$ Relazione 4

$$\sum F_y ; \quad N = M \cdot g$$ Relazione 5

Si ha inoltre

$$F_a = u \cdot M \cdot g \simeq 0{,}3 \cdot 4 \cdot 9{,}81 \simeq 11{,}8\, N$$ Relazione 6