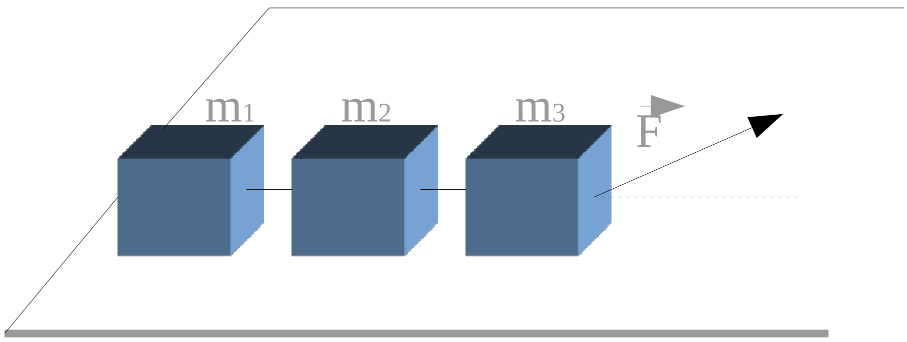
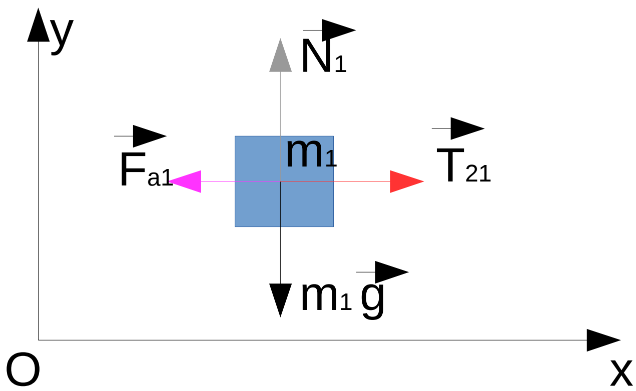
# *Esercizio*

Un ragazzino, per divertirsi, collega tre casse, l'una all'altra, con due funicelle. Pone le casse su un pavimento in fila, come mostrato in figura e le tira esercitando una forza, sulla più pesante, pari a 500N, inclinata di 30° rispetto al pavimento e che giace su un piano ortogonale a quello che contiene il pavimento.
Le masse delle tre casse e i rispettivi coefficienti d'attrito dinamico fra le casse stesse e il pavimento sono rispettivamente: 10 kg, 8 kg, 40 kg  e 0,4; 0,4 e 0,2.
Calcolare l'accelerazione delle casse  e le tensioni sui tre due tratti di fune.
Calcolare la variazione di energia cinetica del sistema composto dalle tre casse in un intervallo di tempo pari a 5 s, supponendo che le casse siano inizialmente ferme.

# *Soluzione standard*




Svolgeremo l'esercizio in più modi, il primo è il seguente.
Consideriamo i diagrammi di corpo libero delle singole casse, a partire da quella di massa $m_1$.

Sul blocco di massa $m_1$ agirà la forza peso, orientata verso il basso, la tensione della fune orientata verso destra, ( indicata con $T_{21}$ ), la forza d'attrito dinamico fra la cassa e il pavimento e la reazione vincolare normale del pavimento.

Applicando la legge fondamentale della dinamica lungo l'asse x e lungo l'asse y si ha:

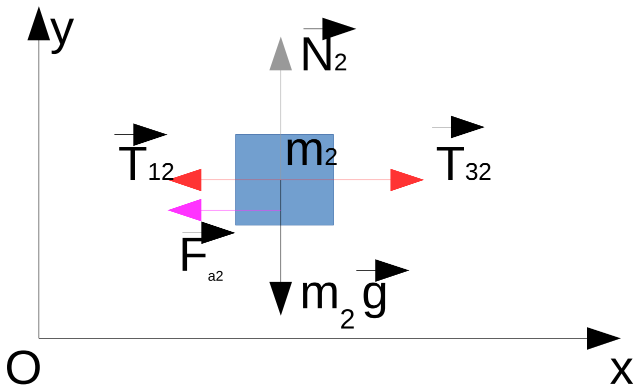
$\sum F_x$ ;   $T_{21} - F_{a1} = m_1 \cdot a$   Indicando, più semplicemente, con $T_1$ la tensione $T_{21}$ si ha:

$T_1 - F_{a1} = m_1 \cdot a$ Relazione 1

$\sum F_y ;$ $N_1 - m_1 \cdot g = 0 \rightarrow N_1 = m_1 \cdot g$

Inoltre si ha: $F_{a1} = u_1 \cdot m_1 \cdot g = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 9{,}81 \simeq 39{,}2\, N$

Diagramma di corpo libero del corpo di massa $m_2$.




Ricordiamo che il principio di azione e reazione di Newton o terza legge della dinamica, recita in questo modo:
*"Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, il corpo B eserciterà sul corpo A una forza uguale e contraria".*
La forza esercitata dal corpo due sul corpo uno, tramite la fune, avrà lo stesso modulo e verso opposto, rispetto alla forza esercitata dal corpo uno sul corpo due.
Si ha allora:

$T_{12} = T_{21} = T_1$

e analogamente $T_{32} = T_{23} = T_2$

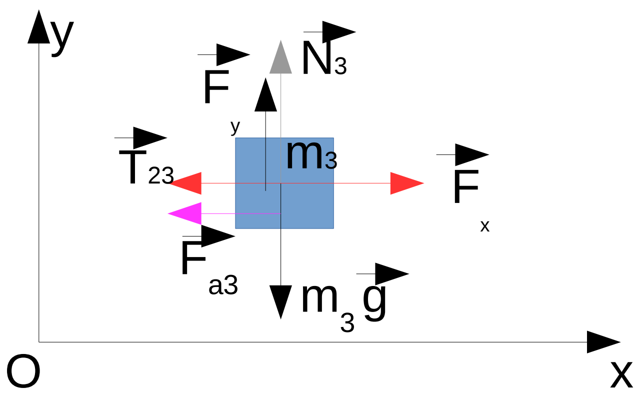
Applicando la legge fondamentale della dinamica lungo gli assi x e y si ha:

$\sum F_x ;$ $T_2 - T_1 - F_{a2} = m_2 \cdot a$ Relazione 2

$\sum F_y ;$ $N_2 = m_2 \cdot g$

Si ha inoltre: $F_{a2} = u_2 \cdot m_2 \cdot g \simeq 0{,}4 \cdot 8 \cdot 9{,}81 \simeq 31{,}4\, N$ $F_{a2} \simeq 31{,}4\, N$

Consideriamo, infine, il diagramma di corpo libero del corpo di massa "$m_3$".



Applicando la seconda legge della dinamica lungo gli assi x e y si ha:

$\sum F_x$ ; $F_x - T_{23} - F_{a3} = m_3 \cdot a$ ; Poiché $T_{32} = T_{23} = T_2$ , si ha:

$F_x - T_2 - F_{a2} = m_3 \cdot a$ Relazione 3

$\sum F_y$ ; $N_3 + F_y - m_3 \cdot g = 0$ Segue : $N_3 = m_3 \cdot g - F_y$ segue, $N_3 = m_3 \cdot g - F \cdot sen(a)$

Dove “a = 30°” è l'angolo formato fra la direzione della forza e quella di una retta parallela al piano.

Si ha ancora:

$$N_3 = m_3 \cdot g - F \cdot sen(a) \simeq 40 \cdot 9{,}81 - 500 \cdot \sin 30 \simeq 142\, N$$

e ancora $F_{a3} = u_3 \cdot N_3 = 0{,}2 \cdot 142 \simeq 28{,}4\, N$ → $F_{a3} \simeq 28{,}4\, N$

Mettiamo a sistema le relazioni 1 2 e 3, tre equazioni nelle incognite $T_1 ; T_2 ; a$ .

$$T_1 - F_{a1} = m_1 \cdot a \quad (1)$$
$$T_2 - T_1 - F_{a2} = m_2 \cdot a \quad (2)$$
$$F_x - T_2 - F_{a2} = m_3 \cdot a \quad (3)$$

Ricaviamo $T_1$ dalla (1) e sostituiamo nella (2). Si ha:

$T_1 = m_1 \cdot a + F_{a1}$ e sostituendo nella 2 →

$$T_2 - m_1 \cdot a - F_{a1} - F_{a2} = m_2 \cdot a \rightarrow T_2 = m_1 \cdot a + F_{a1} + F_{a2} + m_2 \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a + F_{a1} + F_{a2} \rightarrow$$

$T_2 = (m_1 + m_2) \cdot a + F_{a1} + F_{a2}$ sostituendo ancora nella tre si ha:

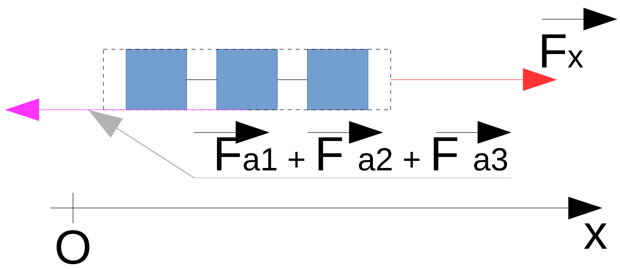
$F_x - (m_1 + m_2) \cdot a - F_{a1} - F_{a2} - F_{a3} = m_3 \cdot a$ risolvendo rispetto ad “a” →

$a = \dfrac{F_x - F_{a1} - F_{a2} - F_{a3}}{m_1 + m_2 + m_3}$ Sostituendo i valori si ha:

$$a = \frac{500 \cdot \cos 30 - 39{,}2 - 31{,}4 - 28{,}4}{68} \simeq 4{,}91\, m/s^2 \rightarrow a \simeq 4{,}91\, m/s^2$$

## *Soluzione alternativa*

E' possibile procedere al calcolo dell'accelerazione attraverso considerazioni diverse. Consideriamo il sistema composto dalle tre masse nella sua globalità.
Le forze esercitate da una massa all'altra mediante le funi, sono delle forze interne al sistema, mentre, le uniche forze esterne che agiscono nella direzione del moto, sono: la forza F, proiettata lungo l'asse x e le tre forze d'attrito fra ciascuna delle masse e il piano.
Fatte queste considerazioni applichiamo la legge fondamentale della dinamica, nella direzione dell'asse x, al sistema complessivo, composto dalle tre masse. Si ha:




$$F_x - F_{a1} - F_{a2} - F_{a3} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a \quad \rightarrow \quad a = \frac{(F_x - F_{a1} - F_{a2} - F_{a3})}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

Dove le forze d'attrito $F_{a1} F_{a2} ed F_{a3}$ sono calcolabili scrivendo le equazioni di equilibrio delle tre masse lungo l'asse y. Esse hanno le seguenti espressioni:

$$F_{a1} = u_1 \cdot m_1 \cdot g$$
$$F_{a2} = u_2 \cdot m_2 \cdot g$$

$$F_{a3} = u_3 \cdot (m_3 \cdot g - F_y)$$

Notiamo che l'espressione dell'accelerazione “a” ottenuta mediante questo procedimento è identica a quella ottenuta scrivendo le equazioni di equilibrio delle singole masse, ossia quella ottenuta risolvendo il sistema composto dalle equazioni (1) (2) e (3).

## *Calcolo delle tensioni.*

Per calcolare le tensioni sulle funi ci avvaliamo delle equazioni precedentemente scritte:

$$T_1 = m_1 \cdot a + F_{a1} \quad \rightarrow \quad T_1 = 10 \cdot 4{,}91 + 39{,}2 \simeq 88{,}3\,N \quad \rightarrow \quad T_1 \simeq 88{,}3\,N$$

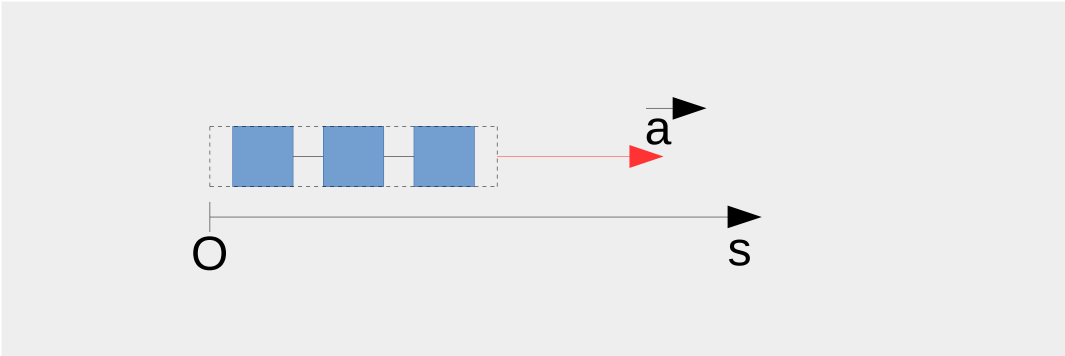
$$T_2 = (m_1 + m_2) \cdot a + F_{a1} + F_{a2} \quad \rightarrow \quad T_2 = 18 \cdot 4{,}91 + 39{,}24 + 31{,}39 = 159\,N \quad \rightarrow \quad T_2 \simeq 159\,N$$

## *Calcolo della variazione di energia cinetica.*

Per il calcolo della variazione di energia cinetica applichiamo il teorema delle forze vive che recita in questo modo:

*Il lavoro compiuto da tutte le forze, conservative e non conservative, applicate ad un corpo, in un certo intervallo di tempo, è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo, nel medesimo intervallo di tempo.*

Fissato il seguente sistema di riferimento, applicando le leggi del moto rettilineo ed uniformemente accelerato è possibile calcolare lo spazio percorso dalle casse nel tempo che va dall'istante zero all'istante t=3s si ha:




$$s(3\,s)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2=0{,}5\cdot 4{,}91\cdot 9\simeq 22{,}1\,m$$

Si ha ancora:

$$L=DK=F_{tot}\cdot s=(F_x-F_{a1}-F_{a2}-F_{a3})\cdot s\simeq(433-39{,}2-31{,}4-22{,}4)\cdot 22{,}1\simeq 7514\,J$$